Спецсеминар. Листок 3. “Введение в топологию”

1. Гомотопические группы.

Определение 1. Два отображения[1] топологических пространств $f, g\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называются *гомотопными* (будем писать $f \simeq g$), если существует отображение $F\colon \mathcal{M} \times I \to \mathcal{N}$, такое что $F|_{t=0} = f$, $F|_{t=1} = g$.

Определение 2. Два топологических пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются гомотопными (будем писать $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$), если существуют отображения $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и $g\colon \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, такие что $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ и $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{N}}$.

Задача 1 (0.5)**.** Покажите, что кольцо, а также плоскость с выколотой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопны окружности. Покажите, что шар, а также плоскость $\mathbb{R}^2$, гомотопны точке. Какие из букв латинского алфавита гомотопны друг другу?

Определение 3. Множество гомотопических классов отображений $f\colon I \to \mathcal{M}$, таких что $f(0) = f(1) = P \in \mathcal{M}$ называется *фундаментальной группой* пространства $\mathcal{M}$ и обозначается $\pi_1(\mathcal{M}, P)$. Отображения в ней можно перемножать следующим образом

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t < 1. \end{cases}$$

Задача 2 (1)**.** Покажите, что умножение корректно определено на классах. Покажите, что для связного пространства фундаментальная группа в действительности не зависит от точки P (поэтому мы будем писать просто $\pi_1(\mathcal{M})$). Какой класс соответствует единице e в группе? Чему равен обратный элемент к классу отображения f?

Задача 3 (1)**.** а) Как повесить картину (Рис. 1) на два гвоздя так, чтобы она упала, если убрать любой из гвоздей[2]?

б) То же для большего числа гвоздей.

в) Приведите пример пространства, в котором фундаментальная группа некоммутативна, т. е. $a * b \neq b * a$.

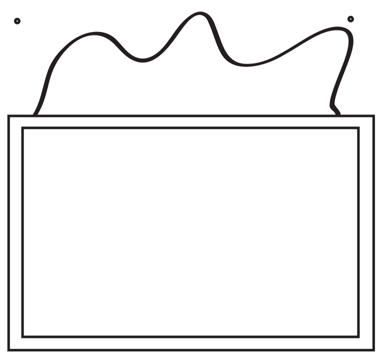

Рис. 1: Белый прямоугольник. Холст, масло.

[1] Всюду, если не оговорено обратное, все отображения считаются непрерывными.

[2] Веревку можно использовать сколь угодно длинную.

Задача 4 (0.5)**.** Найдите $\pi_1(S^1)$, $\pi_1(S^1 \times S^1)$.

Задача 5 (1)**.** Покажите, что $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$. Является ли $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ориентируемым? Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}_2)$.

Задача 6 (2)**.** Найдите группу π_1 для замкнутой ориентируемой двумерной поверхности с тремя ручками (кренделя).

Определение 4. Множество гомотопических классов отображений гиперкуба $f: I^k \to \mathcal{M}$, таких что $f|_{\partial I^k} = P$ называется *k-мерной гомотопической группой* пространства $\mathcal{M}$ и обозначается $\pi_k(\mathcal{M}, P)$. Умножение отображений определяется следующим образом:

$$(f * g)(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_k), & 0 \le t_1 < \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k), & \frac{1}{2} \le t_1 < 1. \end{cases}$$

Задача 7 (1)**.** Покажите, что умножение корректно определено на классах. Покажите, что для связного пространства k-мерная гомотопическая группа в действительности не зависит от точки P (поэтому мы будем писать просто $\pi_k(\mathcal{M})$). Какой класс соответствует единице e в группе? Чему равен обратный элемент к классу отображения f? Покажите, что при $k > 1$ группы $\pi_k(\mathcal{M})$ коммутативны.

Задача 8 (1)**.** Покажите, что $\pi_k(S^n) = 0$ при $k < n$. Покажите, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

2. Фактор-пространства

Определение 5. Пусть группа G действует на пространстве $\mathcal{X}$ без фиксированных точек. *Фактор-пространством* $\mathcal{X}/G$ называется пространство орбит действия группы G, т. е. пространство классов $[P] = \{gP | g \in G\}$.

Задача 9 (1)**.** Пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ определяется как множество прямых, проходящих через начало координат в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Покажите, явно что $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 = S^1$. Покажите также, что $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 = S^1/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ действует отражением относительно центра окружности. Покажите, что $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n/\mathbb{Z}_2$.

Задача 10 (1)**.** Пространство $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ определяется как множество *комплексных* прямых, проходящих через начало координат в $(n+1)$-мерном *комплексном* пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Покажите, явно что $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = S^2$. Покажите также, что $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = S^3/U(1)$ и вообще $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = S^{2n+1}/U(1)$.

Задача 11 (0.5)**.** Найдите $\pi_{1,2,3}(SU(2))$.

Задача 12 (1)**.** Покажите явно, что $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$. Найдите $\pi_{1,2,3}(SO(3))$. *Указание:* воспользуйтесь соответствием между точками сферы $S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) | x^k x^k = 1\}$ и антиэрмитовыми бесследовыми матрицами 2×2 с единичным детерминантом $M = i x^k \sigma^k$.

Задача 13 (2)**.** Покажите явно, что $SO(4) = SU(2) \times SU(2)/\mathbb{Z}_2$. Найдите $\pi_{1,2,3}(SO(4))$. *Указание:* воспользуйтесь результатом задачи 11.

Задача 14 (3)**.** Покажите явно, что $SO(6) = SU(4)/\mathbb{Z}_2$. Найдите $\pi_1(SO(6))$. *Указание:* воспользуйтесь соответствием между точками сферы S^5 и антисимметричными самодуальными комплексными $4{\times}4$ матрицами $\{A_{ij} | A_{ij} = -A_{ji}, A_{ij} = \epsilon_{ijkl} A^*_{kl}, A^*_{ij} A_{ij} = 1\}$.

Задача 15 (1)**.** Покажите, что $SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$.

Задача 16 (1)**.** Покажите, что $SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1}$.
Задача 17 (1)**.** Покажите, что $Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$.

3. Расслоения. Длинная точная последовательность гомотопических групп. Стабилизация.

Определение 6. Расслоением называется набор (E, B, p), состоящий из пространства E *(тотального пространство расслоения)*, пространства B *(базы расслоения)* и отображения $p\colon E \to B$ *(проекции)*, такого что прообразы точек базы $F = p^{-1}(x)$ *(слои)* одинаковы для любого $x \in B$. $(B \times F, B, \mathrm{id} \times 0)$ называется *тривиальным* расслоением. Над каждой картой базы любое расслоение является тривиальным, однако, вообще говоря, имеются функции переклейки слоев на пересечении карт. *Сечением* расслоения называется непрерывный выбор точки в каждом из слоев. Если слой расслоения является векторным пространством, то расслоение называется *векторным;* если слой является группой G, то расслоение называется *главным* G-расслоением.

Задача 18 (0.5)**.** Ленту Мебиуса можно рассматривать как расслоение с базой S^1 и слоем I. Найдите функции переклейки. Покажите, что это расслоение нетривиально.

Рассмотрим границу ленты Мебиуса. Ее можно рассматривать как расслоение с базой S^1 и слоем, состоящим из двух точек. Найдите функции переклейки. Покажите, что расслоение нетривиально. Имеется ли у него хотя бы одно сечение?

Задача 19 (1)**.** Покажите, что расслоение единичных касательных векторов к сфере S^2 не является тривиальным. *Указание:* от противного. Покажите, что тотальное пространство этого расслоения эквивалентно сфере S^3.

Задача 20 (2)**.** Рассмотрим расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ с тотальным пространством $E = (\mathbb{C}^3 \backslash \{0\})/(z_1, z_2, z_3) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda^k z_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, базой $B = \mathbb{C}P^1$ и проекцией $p(z_1, z_2, z_3) = [(z_1, z_2)]$.

а) Найдите функции переклейки.

б) Покажите, что при обходе вокруг экватора $S^1 \subset \mathbb{C}P^1$ слой поворачивается на $2\pi k$.

в) Покажите, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ не имеет ненулевых голоморфных сечений при $k < 0$. Найдите размерность пространства голоморфных сечений при $k \geq 0$. *Указание:* воспользуйтесь функциями переклейки.

г) Покажите, что расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ нетривиально при $k \neq 0$. *Указание:* воспользуйтесь тем фактом, что единственная голоморфная функция на $\mathbb{C}P^1$ — константа.

Определение 7. Последовательность отображений[3]

$$\cdots \to C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} C_3 \xrightarrow{f_3} C_4 \to \cdots$$

называется точной если $\operatorname{im} f_k = \ker f_{k+1}$ для любого k.

[3] Более точно, гомоморфизмов групп C_n.

Задача 21 (0.5)**.** Покажите, что если последовательность $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ точная, что f — изоморфизм.

Задача 22 (0.5)**.** Покажите, что если A, B, C — векторные пространства, и последовательность $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ точная, то $B = B_1 \oplus B_2$, причем $f\colon A \to B_1$ и $g\colon B_2 \to C$ — изоморфизмы.

Убедитесь, что для точной последовательности $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{mod}\,2} \mathbb{Z}_2 \to 0$ это неверно.

Теорема 1. Если (E, B, p) — расслоение, то существует точная последовательность гомотопических групп:

$$\cdots \to \pi_k(F) \to \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B) \xrightarrow{h} \pi_{k-1}(F) \to \pi_{k-1}(E) \xrightarrow{p_*} \pi_{k-1}(B) \to \cdots$$

Задача 23 (2)**.** Используя длинную точную последовательность гомотопических групп, покажите, что если G — конечная группа, то $\pi_k(X/G) = \pi_k(X)$ при $k \geq 2$. Покажите также, что если $\pi_1(X) = 0$, то $\pi_1(X/G) = G$.

Задача 24 (1)**.** Используя длинную точную последовательность гомотопических групп и результаты задач 15, 16 и 17, покажите, что

1. $\pi_k(SO(n)) = \pi_k(SO(n-1))$ при $n > k + 2$,
2. $\pi_k(SU(n)) = \pi_k(SU(n-1))$ при $n > k/2 + 1$,
3. $\pi_k(Sp(n)) = \pi_k(Sp(n-1))$ при $n > k/4 + 1/2$,

Найдите $\pi_{1,2,3}(SO(n))$, $\pi_{1,2,3}(SU(n))$ и $\pi_{1,2,3}(Sp(n))$ для произвольных n.

Задача 25 (2)**.** Используя длинную точную последовательность гомотопических групп и результат задачи 19, покажите, что $\pi_k(S^3) = \pi_k(S^2)$ для всех $k \geq 3$. Вычислите $\pi_3(S^2)$. Приведите пример нетривиального элемента из $\pi_3(S^2)$.

Задача 26 (1)**.** Используя длинную точную последовательность гомотопических групп, покажите, что если $\pi_1(X) = \pi_2(X) = 0$, то $\pi_2(X/H) = \pi_1(H)$.

Список литературы

[1] А. С. Шварц, Квантовая теория поля и топология, глава III.

[2] В. А. Рубаков, Классические калибровочные поля, ч. 1, глава 8.